CH P4 – Décrire un mouvement

Programme officiel :

Thème 2 : Mouvement et interactions

Notions abordées en classe de première (enseignement de spécialité et enseignement scientifique) :
Vecteur position, vecteur vitesse, variation du vecteur vitesse, …

1. Décrire un mouvement

Notions et contenus	Capacités exigibles Activités expérimentales support de la formation
Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point.	Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. Établir les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse.
Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire.	Citer et exploiter les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire.
Mouvement rectiligne uniformément accéléré. Mouvement circulaire uniforme.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré, circulaire, circulaire uniforme. *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie pour déterminer les coordonnées du vecteur position en fonction du temps et en déduire les coordonnées approchées ou les représentations des vecteurs vitesse et accélération.* **Capacité numérique :** Représenter, à l'aide d'un langage de programmation, des vecteurs accélération d'un point lors d'un mouvement. **Capacité mathématique :** Dériver une fonction.

CH P4 – Décrire un mouvement

1. Rappels et définitions

1.1. Relativité du mouvement

En seconde nous avons vu qu'on appelle **système** le corps ou le point que l'on étudie et que pour étudier un mouvement il faut définir un **référentiel** (solide de référence + horloge).

Exemples courants : le référentiel héliocentrique, le référentiel géocentrique, les référentiels terrestre.

Nous avons aussi défini la **trajectoire** d'un point comme l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours du mouvement. C'est une courbe mathématique (point, droite, cercle, …) qui dépend du référentiel d'étude.

Décrire le mouvement d'un système c'est donner sa trajectoire et sa vitesse dans le référentiel choisi.

1.2. Le vecteur position

Pour définir les vecteurs on utilise généralement un repère cartésien $R(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ fixe dans le référentiel choisi.

Soit M, un point du système. Sa position en fonction du temps est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

La norme de ce vecteur est : $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en m.

Pour décrire le mouvement de M on peut donner les équations horaires x(t), y(t) et z(t) pour ensuite en déduire l'équation de la trajectoire.

1.3. Le vecteur vitesse

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

Au collège nous avons défini la vitesse moyenne v (en $m.s^{-1}$) par le rapport de la distance parcourue d (en m) sur la durée du parcours Δt (en s).

En seconde nous avons ajouté le vecteur vitesse instantané : $\vec{v_i} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$

où M et M' sont 2 points successifs.

En première nous avons défini le vecteur variation de vitesse par la différence de deux vecteurs vitesse autour du point considéré : $\Delta\vec{v}_i = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}$

En terminale le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} + v_z.\vec{k}$$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} \text{point d'application : le point M à l'instant t considéré} \\ \text{direction : tangente à la trajectoire} \\ \text{sens : sens du parcours} \\ \text{valeur : } v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \end{array}\right.$$

1.4. Le vecteur accélération

De la même manière, **le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps** :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

La valeur de l'accélération sera donc : $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ en $m.s^{-2}$.

Pour construire le vecteur accélération on utilise le vecteur variation de vitesse $\Delta\vec{v}$ vu en première puisque l'accélération correspond à la variation de la vitesse par rapport au temps : $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

2. Les mouvements rectilignes

2.1. Le mouvement rectiligne

Le mouvement est **rectiligne** si **la trajectoire est une droite**.

Dans ce cas il est judicieux de définir l'un des axes du repère suivant la trajectoire (l'axe Ox par exemple).

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ peuvent varier en norme mais ils garderont toujours la même direction, celle de la droite portée par la trajectoire.

2.2. Le mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement est **uniforme** si **la valeur de la vitesse est constante**.

Le mouvement étant en plus rectiligne alors le vecteur vitesse est constant. Il n'y a donc pas de variation de vitesse, le vecteur accélération est donc nul.

$$\vec{v} = \overrightarrow{constant} \qquad \vec{a} = \vec{0}$$

Ainsi on a **par exemple** les équations horaires suivantes :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = v_{0x} \times t + x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad \vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \qquad \vec{a} \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

2.3. Le mouvement rectiligne uniformément accéléré

Le mouvement est **uniformément accéléré** si **la valeur de l'accélération est constante**.

Le mouvement étant en plus rectiligne alors le vecteur accélération est constant.

$$\vec{a} = \overrightarrow{constant}$$

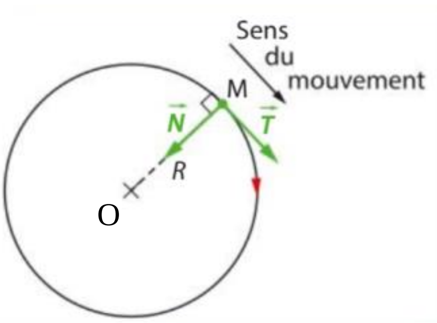
Ainsi on a **par exemple** les équations horaires suivantes :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_{0x} \times t^2 + v_{0x} \times t + x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad \vec{v} \begin{cases} v_x(t) = a_{0x} \times t + v_{0x} \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \qquad \vec{a} \begin{cases} a_x(t) = a_{0x} \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

3. Les mouvements circulaires

Le mouvement est **circulaire** si **la trajectoire est un arc de cercle**. Dans ce cas il est difficile d'étudier le mouvement dans un repère cartésien. On change alors de repère : on se place dans le repère de Frenet.

3.1. Le repère de Frenet



Le point M étudié décrit un cercle (ou un arc de cercle) de centre O et de rayon R.

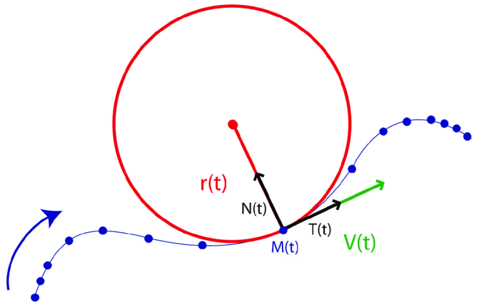
On définit alors les deux vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$:

$$\|\vec{T}\| = \|\vec{N}\| = 1$$

Le vecteur tangent $\vec{T}$ est **tangent à la trajectoire** et orienté **dans le sens du mouvement**.

Le vecteur normal $\vec{N}$ est **normal à la trajectoire** et orienté **vers le centre du cercle**.

Remarque : Ce repère est également utilisé dans les mouvements curvilignes. On commence par définir au point M le vecteur $\vec{T}$, toujours tangent à la trajectoire. $\vec{N}$ sera alors orthogonal à $\vec{T}$. En suivant $\vec{N}$ on trouvera le centre du cercle tangent au point M. r est appelé rayon de courbure.

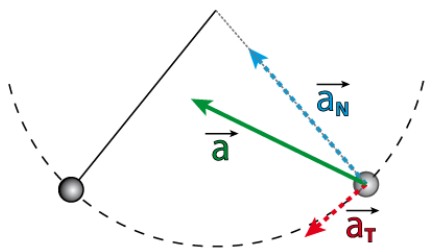


3.2. Le mouvement circulaire

Dans un mouvement circulaire et en se plaçant dans le repère de Frenet. Le vecteur vitesse n'aura qu'une composante suivant le vecteur $\vec{T}$ puisque le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire :

$$\vec{v} = v \times \vec{T}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ se décompose alors suivant une composante normale $\vec{a_N}$ et une composante tangentielle $\vec{a_T}$:



$$\vec{a} = \vec{a_N} + \vec{a_T}$$

avec : $\vec{a_N} = a_N \times \vec{N}$ $\quad a_N = \frac{v^2}{R}$ $\quad$ R étant le rayon du cercle

et $\vec{a_T} = a_T \times \vec{T}$ $\quad a_T = \frac{dv}{dt}$

3.2. Le mouvement circulaire uniforme

Si le mouvement est uniforme alors la **valeur** de la vitesse est constante. On a v = constante mais $\vec{v} \neq \overrightarrow{constant}$ puisque le vecteur vitesse change de direction à chaque instant.

On a donc toujours : $\vec{v} = v \times \vec{T}$

Par contre $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

Ainsi le vecteur accélération n'a qu'une composante normale : $\vec{a} = \vec{a}_N$

On dit que l'accélération est **centripète**.

Remarque : Si le mouvement est circulaire uniforme alors le système décrit un cercle de rayon R d'une façon périodique. En définissant la période T comme la durée qu'il faut pour faire un tour (soit le périmètre du cercle : 2πR) on a alors :

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$